

Feuille d'exercices n° 1

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel non nul et Ω un borélien de $\mathbf{R}^N$. Sauf mention contraire on intégrera toujours par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Un exemple concret.*

D'abord pour $\Omega = B(0, 1)$ puis pour $\Omega = B(0, 1)^c$ et pour $\Omega = \mathbf{R}^N$ discuter en fonction de $p \in [1, \infty]$ et des paramètres $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+)^2$ si la fonction

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha (1 + \|x\|^\beta)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $L^p(\Omega)$.

Exercice 2. *Approximation.*

On suppose que Ω est un ouvert et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ et } \|x\| \leq n \right\}.$$

1. Justifier que chaque K_n est compact et que $\Omega = \cup_{n \in \mathbf{N}^*} K_n$.
2. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$.
Montrer que la suite $(1_{K_n \cap \{|f| \leq n\}} f)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$.
3. Justifier que $L_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ — l'ensemble des fonctions bornées à support compact — est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $p \geq 1$ fini.
4. Justifier que $L_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ — l'ensemble des fonctions bornées à support compact — n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 3. *Mesure finie.* On suppose Ω de mesure $|\Omega|$ finie et l'on se donne $(p, q) \in [1, \infty]^2$ tel que $p \leq q$.

Montrer que si $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Exercice 4. *Interpolation.* Soit $(p, q, r) \in [1, \infty]^3$ tel que $p \leq r \leq q$ et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

1. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et, pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \lambda^{r-p} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \lambda^{-(q-r)} \|f\|_{L^q(\Omega)}^q.$$

Indication : $|f|^r = 1_{\{|f| \leq \lambda\}} |f|^r + 1_{\{|f| > \lambda\}} |f|^r$.

2. En déduire que

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq C(p, q, r) \|f\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta},$$

où $\theta \in [0, 1]$ est défini par $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Remarque : En fait on peut mettre cette constante égale à 1.

Exercice 5. *Convergence faible.*

À tout point $a \in \mathbf{R}^N$ et toute fonction mesurable $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, on associe la translatée

$$\tau_a(f) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x - a).$$

1. Pour $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $a \in \mathbf{R}^N$, déterminer $\|\tau_a(f)\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}$.
2. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$. Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} \tau_a(f) \varphi \xrightarrow{\|a\| \rightarrow \infty} 0.$$

3. Donner un contre-exemple à la conclusion précédente quand $p = \infty$.
4. Conclure que si $1 < p < \infty$ alors $(\tau_a(f))$ converge vers 0 pour la topologie faible de $L^p(\mathbf{R}^N)$ quand $\|a\| \rightarrow \infty$.
5. Donner un contre-exemple à la conclusion précédente quand $p = 1$.